Pavel Obdržálek, LA II

1) *Zadání:* Nechť $z \in \mathbb{C}$ je kořenem reálného polynomu $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R} \forall k$. Dokažte, že $\overline{z}$ je také kořenem polynomu. Dále rozhodněte, zda tvrzení platí i pro komplexní polynomy.

1) *Vypracování:* Pro sčítání dvou komplexních čísel platí: $p, q \in \mathbb{C}$, $\overline{p} + \overline{q} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{p + q}$; pro násobení reálných čísel s komplexními platí: $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{C}$, $m\overline{n} = m(a - bi) = ma - mbi = \overline{m(a + bi)} = \overline{mn}$. Pokud je z kořenem polynomu, pak musí platit $p(z) = 0$. My se tedy budeme snažit zjistit, co platí pro $p(\overline{z})$:
$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = a_0 \overline{z}^0 + a_1 \overline{z}^1 + a_2 \overline{z}^2 + \cdots + a_n \overline{z}^n = \overline{a_0 z^0} + \overline{a_1 z^1} + \overline{a_2 z^2} + \cdots + \overline{a_n z^n} = \overline{a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = 0$. $\overline{z}$ tedy také je kořenem reálného polynomu.

Pro komplexní polynomy to však již platit nebude.
Uvedeme si protipříklad – uvažujme polynom s kořeny $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1 + i$:
$p(x) = x(x-1)(x+1-i) = (x^3 - x) - (x^2 - x)i$. Komplexní číslo je jeho kořenem, ale nikoliv číslo komplexně sdružené s jeho kořenem.